ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN THỊ NGA

MỘT SỐ DẠNG CỦA ĐỊNH LÝ STOLZ-CESÀRO VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN THỊ NGA

MỘT SỐ DẠNG CỦA ĐỊNH LÝ STOLZ-CESÀRO VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 84 60 113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. Trần Văn Thắng

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

MỞ ĐẦU

Các định lý Stolz-Cesàro cổ điển được các nhà toán học Otto Stolz (1842-1905) và Ernesto Cesàro (1859- 1906) đưa ra. Định lý đề cập tới sự tồn tại của các giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ cùng các điều kiện để các giới hạn này bằng nhau. Định lý được xuất bản lần đầu tiên trong [11] và kể từ đó, đã được xuất bản lại trong nhiều tài liệu khác nhau có chủ đề về dãy số và chuỗi số. Định lý được xem như là phiên bản rời rạc của quy tắc L'Hopital trong giới hạn của hàm số và nó cho ta một phương pháp hữu hiệu để tính các giới hạn có dạng không xác định $\dfrac{\infty}{\infty}$ và $\dfrac{0}{0}$ trong các bài toán tính giới hạn, đặc biệt là trong các bài toán tính giới hạn liên quan tới tổng. Gần đây, định lý được sử dụng tính hệ số của đa thức được định nghĩa là tổng các lũy thừa của các số nguyên ([7]) và nghiên cứu tính chất tuần hoàn của hàm số ([5]). Với những ứng dụng kể trên, định lý Stolz-Cesàro ngày càng được các nhà toán học quan tâm mở rộng, phát biểu ở những dạng khác nhau và có thêm được những ứng dụng mới, điển hình là các kết quả của C. Mortici ([8]), G. Nagy ([9]) và S. Puspană ([10]).

Luận văn này sẽ tổng hợp và trình bày một số dạng cổ điển của định lý Stolz-Cesàro; một số dạng mở rộng của G. Nagy và S. Puspană; và một số dạng mới được đưa ra bởi C. Mortici. Tiếp theo, luận văn trình bày một số ứng dụng của định lý Stolz-Cesàro trong việc tính giới hạn của dãy số, trong đó có tính giới hạn của một tổng, đây là bài toán hay thường xuất hiện trong các đề thi toán dành cho học sinh và sinh viên. Một ứng dụng khác của định lý Stolz-Cesàro là tính tổng hữu hạn của các lũy thừa nguyên cũng được chúng tôi trình bày trong luận văn này.

Cuối cùng, chúng tôi sẽ sử dụng một dạng mở rộng định lý Stolz-Cesàro của G. Nagy để nghiên cứu tính chất tuần hoàn của hàm số trong bài toán 11147 của P. P. Dalyay.

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 2 chương:

Chương 1. Một số dạng của định lý Stolz-Cesàro.

Phần đầu của chương trình bày một số khái niệm cơ bản phục vụ cho các mục sau của luận văn. Tiếp theo, chúng tôi trình bày các dạng cổ điển, một số dạng mở rộng và mới của định lý Stolz-Cesàro.

Chương 2. Một số ứng dụng của định lý Stolz-Cesàro.

Chương này tìm hiểu một số ứng dụng của định lý Stolz-Cesàro trong việc tính giới hạn của dãy số, tính tổng lũy thừa của các số nguyên và nghiên cứu tính chất tuần hoàn của hàm số trong bài toán 11147 của P. P. Dalyay.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Lời đầu tiên tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo TS. Trần Văn Thắng. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Xin cảm ơn bạn bè, đồng nghiệp tại trường THPT Tiên Du số 1 và gia đình thân yêu đã tạo điều kiện về thời gian và luôn ủng hộ tôi trong suốt quá trình học tập.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2018

Người viết luận văn

Nguyễn Thị Nga

Chương 1

Một số dạng của định lý Stolz-Cesàro

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản, dạng cổ điển và một số dạng mở rộng của định lý Stolz-Cesàro.

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

1.1.1 Dãy số

Định nghĩa 1.1.1. Dãy số là một hàm số từ $\mathbb{N}$ vào một tập hợp số ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Các số hạng của dãy số thường được ký hiệu là u_n, v_n, x_n, y_n ... Dãy số được ký hiệu là $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$....

Nhận xét 1.1.2. Vì dãy số là một trường hợp đặc biệt của hàm số nên nó cũng có các tính chất của một hàm số.

Định nghĩa 1.1.3. (i) Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy giảm nếu $x_{n+1} \leq x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
(ii) Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy tăng nếu $x_{n+1} \geq x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
(iii) Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy giảm ngặt nếu $x_{n+1} < x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
(vi) Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy tăng ngặt nếu $x_{n+1} > x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Dãy số tăng hoặc dãy số giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.

Định nghĩa 1.1.4. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số thực M sao cho $x_n \leq M$ với mọi n. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số thực m sao cho $x_n \geq m$ với mọi n. Một dãy số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới được gọi là dãy bị chặn.

Định nghĩa 1.1.5. (i) Ta nói dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn a khi n dần đến vô cùng nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số $\{x_n\}$ và ϵ) sao cho với mọi $n > N_0$ ta có $|x_n - a|$ nhỏ hơn ϵ. Ta viết

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0, |x_n - a| < \epsilon.$$

(ii) Dãy số $\{x_n\}$ dần đến dương vô cùng khi n dần đến vô cùng nếu với mọi số thực dương M lớn tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số $\{x_n\}$ và M) sao cho với mọi $n > N_0$ ta có $|x_n|$ lớn hơn M. Ta viết

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0, |x_n| > M.$$

(iii) Dãy số có giới hạn hữu hạn được gọi là dãy hội tụ. Dãy số không có giới hạn hoặc dần đến vô cùng khi n dần đến vô cùng gọi là dãy phân kỳ.

Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy bị chặn. Với mỗi n ta đặt

$$u_n = \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = \sup_{k=1,2,...} x_{n+k},$$
$$v_n = \inf\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = \inf_{k=1,2,...} x_{n+k}.$$

Dễ thấy u_n đơn điệu giảm và bị chặn dưới, nên tồn tại giới hạn. Giới hạn này được gọi là giới hạn trên của dãy $\{x_n\}$ và ký hiệu là $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Tương tự, dãy $\{v_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên, nên tồn tại giới hạn. Giới hạn này được gọi là giới hạn dưới của dãy $\{x_n\}$ và ký hiệu là $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Định lý 1.1.6. *Điều kiện cần và đủ để dãy hội tụ là giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy đó bằng nhau.*

Định lý 1.1.7. (Sự hội tụ của dãy đơn điệu)
Dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ. Dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Định lý 1.1.8. *Nếu* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *là các dãy hội tụ và có giới hạn tương ứng là* a, b *thì các dãy số* $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ *cũng hội tụ và có giới hạn tương ứng là* $a + b$, $a - b$, ab *và* $\dfrac{a}{b}$ *(trong trường hợp dãy số thương, ta giả sử* y_n *và* b *khác không).*

Định lý 1.1.9. *Giả sử* $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Khi đó, ta có* $a \leq b$.

Định lý 1.1.10 (Nguyên lý kẹp)**.** *Giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ *và* $a_n \leq z_n \leq b_n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$. *Khi đó, ta có* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

1.1.2 Chuỗi số

Định nghĩa 1.1.11. Cho dãy số $u_1; u_2; \ldots; u_n; \ldots$. Khi đó gọi tổng vô hạn

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

là *chuỗi số* và ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. u_n là *số hạng tổng quát*; $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ được gọi là *tổng riêng* thứ n của chuỗi số; $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ được gọi là *phần dư* thứ n. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ (hữu hạn) thì chuỗi được gọi là *hội tụ* và s là *tổng của chuỗi*. Nếu s_n không dần tới một giá trị hữu hạn thì chuỗi đó gọi là *phân kỳ*.

Định lý 1.1.12. *Chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ thì* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Định lý 1.1.13. (Tiêu chuẩn so sánh) *Cho 2 chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *nếu* $u_n \leq v_n$ *với* $\forall n \geq n_0 (n_0 \in N)$ *thì từ sự hội tụ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *suy ra sự hội tụ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và từ sự phân kỳ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *suy ra sự phân kỳ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Định lý 1.1.14. (Tiêu chuẩn tương đương) *Cho hai chuỗi số dương* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *và* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$. *Khi đó, ta có:*

Nếu $(0 < k < +\infty)$ *thì hai chuỗi đã cho cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

Nếu $k = 0$ *thì từ sự hội tụ của* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *suy ra sự hội tụ của* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Nếu $k = +\infty$ *thì từ sự phân kỳ của* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *ta suy ra sự phân kỳ của* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

1.1.3 Hàm số

Cho hàm số thực $f(x)$ xác định trên một miền trong $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.15. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D và $(a; b)$ là một khoảng con của D. Hàm số gọi là hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$x_1,\ x_2 \in (a; b) : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$x_1,\ x_2 \in (a; b) : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ gọi là đơn điệu trên khoảng $(a; b)$.

Định nghĩa 1.1.16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của a (có thể trừ điểm a). Số thực l hữu hạn được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to a$ nếu:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Định nghĩa 1.1.17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của a (có thể trừ điểm a). Số thực l hữu hạn được gọi là giới hạn trái (phải) của hàm số $f(x)$ khi $x \to a$ nếu:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \ -\delta < x - a < 0 (0 < x - a < \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Định nghĩa 1.1.18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của x_0. Khi đó hàm $f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Định nghĩa 1.1.19. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trái (phải) tại x_0 nếu hàm $f(x)$ xác định trong một lân cận trái (phải) của x_0 (kể cả x_0) và

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) (\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)).$$

Định nghĩa 1.1.20. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trong khoảng $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi x thuộc khoảng $(a; b)$. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trên $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng $(a; b)$, liên tục phải tại $x = a$ và liên tục trái tại $x = b$.

Định nghĩa 1.1.21. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục đều trên D nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in D$ thỏa mãn $|x - y| < \delta$ ta có $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Định lý 1.1.22. *Hàm $f(x)$ liên tục trên tập compact D thì liên tục đều trên tập D.*

Một hệ quả được suy ra từ định lý trên.

Hệ quả 1.1.23. *Mọi hàm liên tục tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ là liên tục đều.*

Định lý 1.1.24 (Định lý giá trị trung gian)**.** *Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[a; b]$, $f(a) \neq f(b)$. Khi đó $f(x)$ đạt mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$ trên $[a; b]$.*

Định nghĩa 1.1.25. Hàm $f(x)$ được gọi là tuần hoàn với chu kỳ $T > 0$ trên miền D nếu $x \pm T \in D$ với mọi $x \in D$ và

$$f(x \pm T) = f(x), \ \forall x \in D.$$